

# Eine Erweiterung des Differenzen-Verfahrens zur Berechnung von kugelsymmetrischen Temperaturfeldern

Von HERMANN SCHWAN

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt a. M.

(Z. Naturforschg. 2a, 678—682 [1947]; eingegangen am 2. Juni 1947)

Mit dem Differenzenverfahren können in einfacher Weise beliebige Anheiz- und Abkühlungsvorgänge, soweit sie kugelsymmetrisch verlaufen, behandelt werden. Sowohl der Fall, daß eine Kugel von einem Medium konstanter Außentemperatur umgeben wird, wie auch der Fall, daß die Temperatur ohne Störung durch Konvektion in der Umgebung der geheizten Kugel sich einstellt, wird erörtert und führt auf leicht durchführbare Rechnungen und Konstruktionen. Zum Schluß wird gezeigt, wie sich aus den angegebenen Rekursionsformeln die analytischen Gesetzmäßigkeiten der stationären Temperaturverteilung leicht elementar ableiten lassen.

Im Rahmen der von Rajewsky und seinen Mitarbeitern durchgeführten Untersuchungen zur Klärung des Wirkungsmechanismus ultrahochfrequenter elektrischer Felder auf biologische Gewebe<sup>1</sup> erhob sich die Frage, ob durch elektrisch hervorgerufene Wärmeentwicklung Bakterien oder Bakterienkulturen abgetötet werden können. Auf Grund der von Krasny-Ergen<sup>2</sup> und Malov<sup>3</sup> durchgeführten Arbeiten muß die Möglichkeit einer solchen selektiven Abtötung einzelner Bakterien verneint werden. Dies gilt jedoch nicht für größere Gebilde, wie sie durch Bakteriengruppen gegeben sind. Die Aussichten für eine selektive Erwärmung solcher Komplexe sind nun sehr davon abhängig, ob stationäre Verhältnisse vorliegen oder aber, ob nur der Anlaufprozeß kurz nach Einschalten des elektrischen Feldes benutzt wird. Auf die Theorie des hier interessierenden nichtstationären Anlaufvorganges und seine biologische Bedeutung ist an anderer Stelle näher eingegangen<sup>4</sup>. Es zeigte sich, daß zwar eine große Mannigfaltigkeit von Anlaufprozessen leicht berechnet werden kann, wenn nur einer von ihnen bekannt ist. Jedoch gelang keine ganz allgemeine Lösung des Problems. Es sei daher in dieser Arbeit ein Näherungsverfahren angegeben, mit dessen Hilfe jeder kugelsymmetrische Anlaufvorgang berechnet werden kann.

<sup>1</sup> B. Rajewsky, Ergebnisse der biophysikalischen Forschung: Bd. 1. Ultrakurzwellen. Gg. Thieme, Leipzig 1938.

<sup>2</sup> W. Krasny-Ergen, Ann. Physik (V) 23, 277 u. 304 [1935].

<sup>3</sup> N. N. Malov, Strahlentherapie 53, 326 [1935].

In Anbetracht der Tatsache, daß die exakte mathematische Behandlung der Probleme des Wärmeausgleiches nicht geringe Schwierigkeiten bereitet, wurden von verschiedenen Autoren Näherungsverfahren entwickelt. Allen diesbezüglichen Arbeiten, soweit sie die Anwendung von Differenzen-Verfahren vorschlagen, ist der Ersatz der Differential-Quotienten durch Differenzen-Quotienten in den jeweils vorliegenden Differential-Gleichungen gemeinsam. Dadurch gelingt die Herstellung von Rekursions-Formeln, mit deren Hilfe es möglich wird, aus einem vorgegebenen räumlichen Temperaturverlauf den Verlauf zur etwas späteren Zeit  $t + \Delta t$  abzuleiten. Es ist also möglich, aus dem vorgegebenen Anfangszustand schrittweise den gesamten zeitlichen Verlauf für alle Raumpunkte abzuleiten. Das Verfahren läßt sich sowohl graphisch als auch rechnerisch durchführen, ist recht einfach in der Anwendung und hat den weiteren Vorteil, an die verschiedensten Randbedingungen leicht angepaßt werden zu können.

Als erster hat Schmidt<sup>5</sup> das Verfahren auf ebene Problemstellungen angewandt. Er hat die Differentialgleichung des eindimensionalen Temperaturausgleichsvorganges

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

<sup>4</sup> H. Schaefer u. H. Schwan, Ann. Physik (V), 43, 99 [1943].

<sup>5</sup> E. Schmidt, Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme. Beiträge zur techn. Mechanik u. Physik. Zu A. Föppls 70. Geburtstag. J. Springer, Berlin 1924.



( $T$  Temperatur,  $a$  Temperaturleitfähigkeit,  $t$  Zeit,  $x$  Raumkoordinate) behandelt und die Rekursionsformel

$$T(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2} [T(x - \Delta x, t) + T(x + \Delta x, t)] \quad (2)$$

abgeleitet. Dabei müssen die genügend klein zu wählenden Längen- und Zeitintervalle  $\Delta x$  und  $\Delta t$  so bestimmt werden, daß der Gleichung

$$2a \Delta t = (\Delta x)^2 \quad (2a)$$

genügt wird. Die Gl. (2) erlaubt eine sehr einfache geometrische Interpretation: Die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t + \Delta t$  erhält man aus den zeitlich um  $\Delta t$  früheren Temperaturwerten an den Stellen  $x - \Delta x$  und  $x + \Delta x$  durch einfache Mittelung. Um die dadurch gegebene einfache Konstruktion auch auf zylinder- und kugelsymmetrische Probleme anwenden zu können, verwendet Schmidt in einer späteren Arbeit<sup>6</sup> für die Darstellung der ortsabhängigen Variablen statt des ursprünglich linearen Maßstabes mit konstanter  $\Delta x$ -Breite logarithmisches bzw. reziprokes Raster. In weiterer Durchführung dieses Gedankens zeigt Schmidt, wie durch geeignet gewählten Maßstab der ortsabhängigen Variablen das Problem des Stabes mit veränderlichem Querschnitt und mit örtlich veränderlichen Stoffwerten sowie das Problem des Wärmeüberganges an strömende Medien zu behandeln ist. Weicht der neue Maßstab sehr vom linearen Raster ab, so bereitet allerdings die zeichnerische Durchführung des Verfahrens praktische Schwierigkeiten, denn bei dieser wird die Temperatur in Abhängigkeit von der ortsveränderlichen Koordinate mit der Zeit als Parameter dargestellt. Bei zu ungleichmäßiger Teilung der Abszisse werden also die Temperaturwerte ebenfalls sehr ungleich verteilt vorliegen. Die logarithmische Verzerrung, die die Durchführung des Differenzen-Verfahrens bei zylindersymmetrischen Problemen ermöglicht, erscheint noch erträglich. Die bei Kugelsymmetrie erforderliche reziproke Verzerrung dagegen führt beim graphischen Verfahren zu größeren Ungenauigkeiten, wie man der Abb. 1 z. B. entnehmen kann. Denn die Dichte der zu erfassenden Ortswerte ist am einen Ende der

<sup>6</sup> E. Schmidt, Forsch. Gebiet Ingenieurwes., Ausg. A, 13, 177 [1942].

<sup>7</sup> H. Pfrlem, Luftfahrtforsch. 19, 197 [1942].

<sup>8</sup> Durch Einsetzen von  $ur = T$  in die Differentialgleichung (3) überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gl. (4).

Skala zu groß, um eine übersichtliche Zeichnung zu ermöglichen, während der am anderen Skalenende vorliegende Mangel an zu erfassenden Orts-

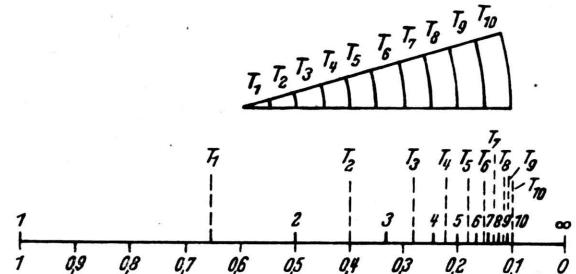


Abb. 1. Reziproke Verzerrung bei Kugelsymmetrie.

werten eine leidliche Approximation an den wirklichen Verlauf in den meisten Fällen nicht erreichen läßt.

Diese Schwierigkeit umgeht Pfrlem<sup>7</sup>, indem er mit Hilfe der Substitution  $u = T/r$  die Differentialgleichung des kugelsymmetrischen Temperaturausgleichproblems

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

in bekannter Weise<sup>8</sup> in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

überführt. Die Gl. (4) läßt sich wie Gl. (1) in einfacher Weise durch fortschreitendes Mitteln behandeln. Aus den so gewonnenen  $u$ -Kurven erhält man dann schließlich durch Multiplikation mit  $r$  die Temperaturkurven.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie mit der gleichen Methodik das Problem des nichtstationären Anheizvorganges mit konstanter und zeitveränderlicher Heizleistung gelöst werden kann. Vorausgesetzt wird Kugelsymmetrie des Temperaturfeldes.

Einer Kugel vom Radius  $R$  werde die spezifische Heizleistung  $q$  kcal/h m<sup>3</sup> zugeführt. Diese Heizleistung kann in beliebiger Weise zeitabhängig sein. Während des nichtstationären Anheizvorganges wird die spezifische Wärmeleistung z. Tl. zur Erwärmung der Kugel verwandt. Dieser Teil wird durch den Wert  $\sigma \varrho \frac{\partial T}{\partial t}$  angegeben ( $\sigma$  spezif. Wärme,  $\varrho$  Dichte der Kugel). Daneben fließt ein Teil, der gleich  $\operatorname{div} j$  ist ( $j$  Wärmestromdichte), nach außen ab. Insgesamt gilt

$$q(t) = \operatorname{div} j + \sigma \varrho \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5)$$

Wegen der vorausgesetzten Kugelsymmetrie folgt hieraus die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q}{k} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

für das Kugellinnere. Im Außenraum liegt keine Wärmeentwicklung vor. Dort gilt daher, wenn keine Konvektion stört:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (7)$$

Die Substitution  $T = \frac{u}{r}$  bedingt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^3} u, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\frac{1}{a \Delta t} [u(r, t + \Delta t) - u(r, t)] = \frac{1}{(\Delta r)^2} [u(r + \Delta r, t) + u(r - \Delta r, t) - 2u(r, t)] + r \frac{q(t)}{k} \quad (\text{Kugel}), \quad (12)$$

$$\frac{1}{a \Delta t} [u(r, t + \Delta t) - u(r, t)] = \frac{1}{(\Delta r)^2} [u(r + \Delta r, t) + u(r - \Delta r, t) - 2u(r, t)] \quad (\text{Außenraum}). \quad (13)$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen stehen nur  $u$ -Werte der Zeit  $t$ . Sind diese gegeben, so liefern die linken Seiten  $u$ -Werte für einen um  $\Delta t$  späteren Zeitwert. So ist es möglich, von einer vorgegebenen Anfangsverteilung an allmählich den gesamten Zeitablauf zu erfassen. Dabei sind die  $u$ -Werte an der Kugeloberfläche vorgegebenen Randbedingungen entsprechend aneinander anzuschließen, wie noch ausgeführt werden soll. Macht man durch geeignete Wahl der  $\Delta r$ - und  $\Delta t$ -Intervalle

$$a \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

so nehmen die Gln. (12) und (13) eine besonders einfache Form an:

$$\begin{aligned} u(r, t + \Delta t) &= \frac{1}{2} [u(r + \Delta r, t) + u(r - \Delta r, t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Delta r)^2 r \frac{q(t)}{k} \quad (\text{Kugel}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u(r, t + \Delta t) &= \frac{1}{2} [u(r + \Delta r, t) + u(r - \Delta r, t)] \\ &\quad (\text{Außenraum}). \end{aligned} \quad (16)$$

An Stelle der Differentialgl. (6) und (7) erhält man also

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{q}{k} \quad (\text{Kugel}), \quad (9)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (\text{Außenraum}). \quad (10)$$

Ersetzen wir die Differentiale durch Differenzen, so geht über

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &\rightarrow \Delta r, \\ \frac{\partial t}{\partial t} &\rightarrow \Delta t, \\ \partial u_t &\rightarrow \Delta u_t = u(r, t + \Delta t) - u(r, t), \\ \partial u_r &\rightarrow \Delta u_r = u(r + \Delta r, t) - u(r, t), \\ \partial^2 u_r &\rightarrow \Delta u_r = u(r + \Delta r, t) - u(r, t) \\ &\quad - [u(r, t) - u(r - \Delta r, t)] \\ &= u(r + \Delta r, t) + u(r - \Delta r, t) \\ &\quad - 2u(r, t), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und es ergeben sich die Differenzgleichungen

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} = \left( \frac{a R}{k} - 1 \right) (T_a - T_0) + T_a \quad (17)$$

Für den oft interessierenden Fall, daß die Umgebungstemperatur der Kugel konstant bleibt, verliert die Gl. (16) ihre Bedeutung. Man hat dann lediglich Gl. (15) auszuwerten, wobei die Steigung der Funktion  $u(r, t)$  an der Kugeloberfläche durch die von H. P f r i e m angegebene Gleichung

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} = \left( \frac{a R}{k} - 1 \right) (T_a - T_0) + T_a \quad (17)$$

( $\alpha$  Wärmeübergangszahl,  $T_a$  Außentemperatur,  $T_0 = u(R)/R$  Oberflächentemperatur) bestimmt ist. Bei der graphischen Konstruktion verwendet man an der Kugeloberfläche dann zweckmäßig einen Richtpunkt, durch den die jeweiligen Tangenten der  $u$ -Kurven an der Kugeloberfläche gehen müssen (s. Abb. 2).

Ist die Außentemperatur nicht konstant und stört keine Konvektion, so sind die Gln. (15) und (16) durch die folgenden Randbedingungen aneinander anzuschließen:

1. Bei flüssigen und festen Stoffen dürfen die Temperaturwerte an der Grenzfläche  $T_i(R)$  und

$T_a(R)$  gleichgesetzt werden. Hieraus folgt

$$u_i(R) = u_a(R) = u(R). \quad (18)$$

2. Die Werte der Wärmestromdichten innen und außen sind an der Grenzfläche gleich. Da die Wärmestromdichte  $j$  durch die Beziehung

$$j = -k \text{ grad } T = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (19)$$

gegeben ist, folgt für  $r = R$

$$k_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = k_a \frac{\partial T_a}{\partial r}.$$

Wegen Gl. (8) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} k_i \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u_i}{\partial r}(R) - \frac{u_i(R)}{R^2} \right] \\ = k_a \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u_a}{\partial r}(R) - \frac{u_a(R)}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Werden die Ableitungen nach  $r$  mit  $u'_i$  und  $u'_a$  bezeichnet, so folgt wegen Gl. (18) aus Gl. (20)

$$\begin{aligned} k_i u'_i(R) - k_i \frac{u_i(R)}{R} &= k_a u'_a(R) - k_a \frac{u_a(R)}{R}, \\ u'_i(R) &= \frac{k_a}{k_i} u'_a(R) + C u(R), \\ C &= \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{k_a}{k_i} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Da die den Rand  $r = R$  berührenden Linienelemente die Steigungswerte  $u'_i(R)$  und  $u'_a(R)$  besitzen, entnimmt man der Abb. 3 die Beziehungen

$$u_a - u_i = \Delta_i u'_i(R) + \Delta_a u'_a(R), \quad (22)$$

$$u_a - u(R) = \Delta_a u'_a(R). \quad (23)$$

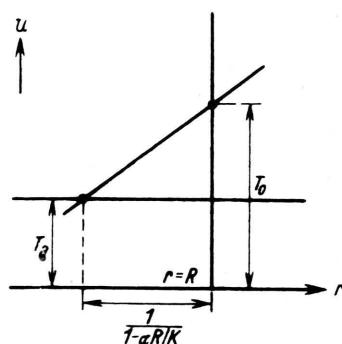


Abb. 2. Richtpunktkonstruktion bei konstanter Umgebungstemperatur nach P f r i e m.

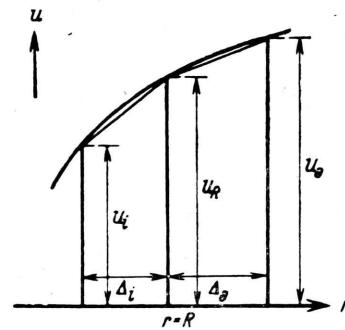


Abb. 3. Zur Berechnung der Oberflächentemperaturwerte.

Die Gl. (22) bedingt:

$$u'_i(R) = \frac{u_a - u_i}{\Delta_i} - \frac{\Delta_a}{\Delta_i} u'_a(R). \quad (24)$$

Ebenso folgt aus Gl. (23)

$$u'_a(R) = \frac{u_a}{\Delta_a} - \frac{u(R)}{\Delta_a}. \quad (25)$$

Gehen wir mit den Werten der Gln. (24) und (25) in die Gl. (21) ein, so folgt

$$u_a - u_i - \Delta_a \left( \frac{u_a}{\Delta_a} - \frac{u(R)}{\Delta_a} \right) = \Delta_i \frac{k_a}{k_i} \left( \frac{u_a}{\Delta_a} - \frac{u(R)}{\Delta_a} \right) + C u(R) \Delta_i,$$

$$u(R) \left[ 1 - C \Delta_i + \frac{\Delta_i}{\Delta_a} \cdot \frac{k_a}{k_i} \right] = \frac{\Delta_i k_a}{\Delta_a k_i} u_a + u_i, \quad (26')$$

$$u(R) = K_1 u_a + K_2 u_i. \quad (26)$$

Darin bedeutet:

$$K_1 = \frac{K}{1 - C \Delta_i + K} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{1}{1 - C \Delta_i + K}, \quad (27 \text{ a})$$

$$C = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{k_a}{k_i} \right) \quad \text{und} \quad K = \frac{\Delta_i}{\Delta_a} \frac{k_a}{k_i}. \quad (27 \text{ b})$$

Das Intervall-Verhältnis  $\Delta_i/\Delta_a$  bestimmt sich aus der Gl. (14) zu

$$\frac{\Delta_i^2}{\Delta_a^2} = \frac{2 a_i \Delta t}{2 a_a \Delta t} = \frac{a_i}{a_a}. \quad (27 \text{ c})$$

Es ist also gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Temperaturleitfähigkeiten innen und außen.

Die Gl. (26) ermöglicht es, in einfacher Weise numerisch die Randtemperaturwerte aus den benachbarten Temperaturwerten so zu bestimmen,

daß der Gl. (20) genügt wird. Graphisch läßt sich die Randtemperatur mit Hilfe der in Abb. 4 angegebenen Konstruktion gewinnen: Ein fester

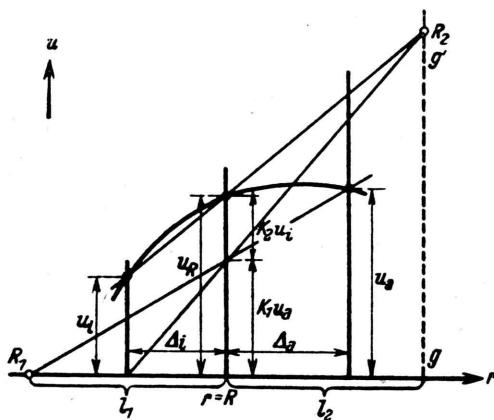


Abb. 4.

Richtpunkt  $R_1$  im Abstand  $l_1$  von der Stelle  $r = R$  auf der  $r$ -Achse liefert, mit dem  $u_a$ -Wert verbunden, auf der  $R$ -Ordinate den Wert  $K_1 u_a$ . Für  $l_1$  gilt dabei offenbar die Beziehung

$$\frac{l_1 + \Delta_a}{l_1} = \frac{u_a}{K_1 u_a} = \frac{1}{K_1},$$

$$l_1 = \frac{\Delta_a K_1}{1 - K_1}. \quad (28)$$

Im Abstand  $l_2$  von  $R$  befindet sich eine Hilfsgerade  $gg'$  parallel zur  $u$ -Achse. Die Verbindung des Fußpunktes von  $u_i$  mit dem Ordinatenwert  $K_1 u_a$  liefert als Schnitt mit  $gg'$  einen zweiten Richtpunkt  $R_2$ . Die Verbindung von  $R_2$  mit dem Wert  $u_g$  ergibt dann als Schnitt mit der  $R$ -Ordinate den gesuchten Wert  $u(R)$ . Der Abstand  $l_2$  berechnet sich aus der der Abb. 4 zu entnehmenden Verhältnisgleichung:

$$\frac{l_2 + \Delta_i}{l_2} = \frac{u_i}{K_2 u_i} = \frac{1}{K_2},$$

$$l_2 = \frac{\Delta_i K_2}{1 - K_2}. \quad (29)$$

Der Richtpunkt  $R_1$  ändert also während des gesamten Verlaufes der Konstruktion seine Lage nicht. Der Richtpunkt  $R_2$  dagegen gleitet auf der Geraden  $gg'$  in der angegebenen Weise.

Die graphische Konstruktion inner- und außerhalb der Kugel verläuft auf Grund der Gl. (15) und (16) einfach: außen besteht sie in fortgesetztem Mitteln der nach beiden Seiten benachbarten  $u$ -Werte, innen tritt außerdem noch ein  $r$ -proportionales Glied additiv hinzu. Offenbar ist außen der stationäre Zustand erreicht, wenn durch Mitteln keine Änderung des  $u$ -Verlaufes mehr eintritt. Das ist der Fall, wenn  $u$  linear von  $r$  abhängig ist. Da  $T = u/r$  gilt, folgt somit in Übereinstimmung mit der exakten mathematischen Betrachtung, daß die Temperatur proportional mit  $1/r$  verläuft. Aus der Gl. (15) kann in entsprechender Weise ohne höhere Mathematik abgeleitet werden, wie der stationäre Temperaturverlauf in der Kugel ist. Offenbar ändert sich  $u$  nicht mehr, wenn die durch das Mitteln der Werte  $u(r + \Delta r)$  und  $u(r - \Delta r)$  bedingte Änderung durch das Hinzufügen von  $\frac{1}{2}(\Delta r)^2 r \frac{q}{k} = Kr$  wettgemacht wird. Bezeichnen wir die  $u$ -Funktion des stationären Zustandes mit  $f(r)$ , so muß also erfüllt sein:

$$Kr = f(r) - \frac{1}{2} [f(r + \Delta r) + f(r - \Delta r)].$$

Reihenentwicklung bedingt

$$2Kr = 2f(r) - \left[ f(r) + \Delta r f' + \frac{(\Delta r)^2}{2} f'' + \dots + f(r) - \Delta r f' + \frac{(\Delta r)^2}{2} f'' + \dots \right].$$

In guter Näherung gilt bei genügend kleinem  $r$

$$2Kr = -(\Delta r)^2 f'',$$

$$f'' = -2 \frac{K}{(\Delta r)^2} r.$$

Durch zweimaliges Integrieren folgt hieraus

$$f = -\frac{K}{3(\Delta r)^2} r^3 + Ar + B$$

$$= -\frac{q}{6k} r^3 + Ar + B = Tr,$$

$$T_i = -\frac{1}{6} \frac{q}{k} r^2 + \frac{B}{r} + A.$$

Auch dieses Ergebnis wird durch die analytische Theorie bestätigt.